

1a) Vamos usar: $[A, B], A] = [AB - BA, A] = ABA - BAA - AAB + ABA = 0$

$\Rightarrow \underline{BAA = 2ABA - AAB}$ (I) $\leftarrow$ identidade p/ comutar A's p/ esquerda.

$$\begin{aligned} [B, e^{xA}] &= [B, (1 + xA + \frac{(xA)^2}{2!} + \frac{(xA)^3}{3!} + \dots)] = B + xBA + \frac{x^2 BA^2}{2!} + \frac{x^3 BA^3}{3!} + \dots \\ &\quad - B - xAB - \frac{(xA)^2 B}{2!} - \frac{(xA)^3 B}{3!} - \dots \\ &= x[B, A] + \frac{x^2}{2!} [B, A^2] + \frac{x^3}{3!} [B, A^3] + \dots \end{aligned}$$

Ollando o que quero provar, preciso de expressões p/ $[B, A^n]$ em que potências de A apareçam à esquerda:

$$[B, A^2] = \underline{BAA} - AAB = 2ABA - 2AAB = 2A[B, A]$$

$\uparrow$ uso ident. (I)

$$\begin{aligned} [B, A^3] &= \underline{BAAA} - AAAB = (2ABA - AAB)A - AAAB = 2ABAA - \underline{AAAB} - AAAB \\ &\quad \text{(I)} \quad \text{(I)} \\ &= 2A(2ABA - AAB) - AABA - AAAB = 4AABA - 3AAAB - AABA \\ &= 3A(AA - AB) = 3A^2[B, A] \end{aligned}$$

Generalizando: $\Rightarrow \underline{[B, A^n] = nA^n[B, A]}$ Substituo na expressão p/

$$[B, e^{xA}] = x \left\{ [B, A] + \frac{x}{2!} 2A[B, A] + \frac{x^2}{3!} 3A^2[B, A] + \dots \right\} [B, e^{xA}]$$

$$= x \cdot \left\{ 1 + xA + \frac{(xA)^2}{2!} + \frac{(xA)^3}{3!} + \dots \right\} [B, A] = x e^{xA} [B, A]$$

$$\Rightarrow \boxed{[B, e^{xA}] = x e^{xA} [B, A]} \quad \text{Q.D.}$$